Facundo

1	2	3	4	Nota
B-	B	R	B	8

Apellido y Nombre: FILIPPO AGUSTINA. N° de libreta:

Carrera: Lic. Ciencias de la Computación

Turno: 9 a 14hs. A-K ☐ 9 a 14hs. L-Z ☐ 14 a 16hs. ☐ 17 a 22hs. ☒

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2024 - Primer parcial - 17/05/2024

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{F} = \{h : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,\ldots,50\} \ / \ h \text{ es inyectiva}\}$.
Definimos en $\mathcal{F}$ la relación $\mathcal{R}$ como

$$f \,\mathcal{R}\, g \quad \text{si y sólo si} \quad \#\big(\mathrm{Im}(f) \setminus \mathrm{Im}(g)\big) = 0 \text{ o } 4.$$

a) Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Sea $f \in \mathcal{F}$ definida como $f(x) = x$ para $1 \le x \le 4$. Calcular cuántas funciones $g \in \mathcal{F}$ satisfacen $f \,\mathcal{R}\, g$.

Ejercicio 2. Probar que

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-1} = 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 3. Calcular, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de dividir por 18 a

$$5 \cdot 35^n + 73^{3021} + \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!$$

Ejercicio 4. Caracterizar, para cada $a \in \mathbb{Z}$, el valor de $(a^3 + 31 : a^2 - a + 1)$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas.

AGUSTINA FILIPPO

1) a) Reflexividad: ¿$\forall f \in R, fRf$?

Tenemos que:

$Im(f) - Im(f) = 0$.

Por lo que $\#(Im(f) - Im(f)) = 0$.

$\Rightarrow fRf \Rightarrow R$ es reflexiva

Simetría: ¿$\forall f, g \in R, fRg \wedge gRf$?

Para que $\#(Im(f) - Im(g)) = 0$, la imagen de f y la imagen de g deben compartir todos sus elementos, ya que en caso contrario $\#(Im(f) - Im(g)) \neq 0$ (sería mayor).

$\Rightarrow fRg$.

Para que $\#(Im(f) - Im(g)) = 4$, la $Im(f)$ no debe compartir ningún elemento con la $Im(g)$, porque en caso contrario $\#(Im(f) - Im(g)) \neq 4$ (sería menor).

$\Rightarrow fRg$.

Para que $\#(Im(g) - Im(f)) = 0$, ambas imágenes deben compartir todos sus elementos, ya que sino $\#(Im(g) - Im(f)) > 0$

$\Rightarrow gRf$.

Para que $\#(Im(g) - Im(f)) = 4$, las imágenes de f y g no deben compartir ningún elemento, porque en ese caso $\#(Im(g) - Im(f)) < 4$.

$\Rightarrow gRf$.

Resumiendo:

Si las imágenes de f y g comparten todos sus elementos:

$\Rightarrow fRg \wedge gRf$.

Si las imágenes de f y g no comparten ningún elemento:

$\Rightarrow fRg \wedge gRf$.

$\Rightarrow R$ es simétrica.

Antisimetría: ¿$\forall f, g \in R, fRg \wedge gRf \Rightarrow f = g$?

Probemos que no lo es mediante un contraejemplo.

Tenemos:

$Im(f)=\{1,2,3,4\}$.

$Im(g)=\{5,6,7,8\}$.

Tenemos que:

$Im(f)-Im(g)=\{1,2,3,4\}-\{5,6,7,8\}=\{1,2,3,4\}$.

$\#(Im(f)-Im(g))=4 \Rightarrow fRg$.

Por otra parte:

$Im(g)-Im(f)=\{5,6,7,8\}-\{1,2,3,4\}=\{5,6,7,8\}$.

$\#(Im(g)-Im(f))=4 \Rightarrow gRf$.

Como $fRg \wedge gRf$, pero $f\neq g$.

$\Rightarrow R$ no es antisimétrica.

Transitividad: ¿$\forall f,g,h \in R, fRg \wedge gRh \Rightarrow fRh$?

Probemos que no lo es mediante un contraejemplo:

Tenemos:

$Im(f)=\{1,2,3,4\}$.

$Im(g)=\{5,6,7,8\}$.

$Im(h)=\{4,9,10,11\}$.

Entonces:

$Im(f)-Im(g)=\{1,2,3,4\}-\{5,6,7,8\}=\{1,2,3,4\}$

Como $\#(Im(f)-Im(g))=4 \Rightarrow fRg$.

Por otro lado:

$Im(g)-Im(h)=\{5,6,7,8\}-\{4,9,10,11\}=\{5,6,7,8\}$.

Como $\#(Im(g)-Im(h))=4 \Rightarrow gRh$.

Por último:

$Im(f)-Im(h)=\{1,2,3,\underbrace{4\}-\{4}_{\text{comparten el } 4},9,10,11\}=\{1,2,3\}$

Como $\#(Im(f)-Im(h))=3\neq 4 \Rightarrow f\not R h$.

Como fRg, gRh pero $f\not R h$.

$\Rightarrow R$ no es transitiva.

NOSOTROS FINAL

①ⓑ Sabemos que $f(x)=x$ (función identidad).
y $f(x)$ está definida para $1 \leq x \leq 4$.
Entonces tenemos: $f(1)=1$

$f(2)=2$

$f(3)=3$.

$f(4)=4$.

También sabemos que todas las funciones son inyectivas y que $f R g$ cuando $\#(Im(f)-Im(g))=0$ o 4.
Tenemos 2 casos:

Ⓘ Para que $\#(Im(f)-Im(g))=0$, $Im(g)$ debe contener a los elementos $1,2,3$ y 4.
Esto lo calculamos como $4!$ → permutaciones de $1,2,3,4$ en $Im(g)$.

Ⓘ Para que $\#(Im(f)-Im(g))=4$, $Im(g)$ no puede contener los elementos $1,2,3$ y 4.
Lo calculamos como:

$\binom{46}{4}$ → Los elementos de F del codominio pero sin 1,2,3 ni 4.
→ Elementos que necesito para la imagen de g.

$\binom{46}{4}=\dfrac{46!}{4!\,(46-4)!}=163185$

Además cada permutación da una función f; serán en total $\binom{46}{4}4!$
$=\dfrac{46!}{(46-4)!}$ = # func. iny de un cjto. de 4 elem en uno de 46 elem

Como tenemos casos disjuntos, sumo ambos casos:

$\underbrace{4!}_{\text{caso Ⓘ}}+\underbrace{\binom{46}{4}}_{\text{caso Ⓘ}}=163189$ → Cantidad de funciones $g \in F$ que cumplen $f R g$.

AGUSTINA FILIPPA

(2) Lo pruebo por inducción.
Defino mi proposición:

$p(n)$: " $\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-1} = 2^n$ " vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

(1) Caso base: ¿$p(1)$ v?

$\prod_{i=1}^{1} \frac{n+i}{2i-1} = 2^1$.

$\frac{1+1}{2\cdot 1-1} = 2$.

$2 = 2 \Rightarrow p(1)$ v.

(2) Paso inductivo: ¿$\forall h \in \mathbb{N}, p(h)$ v $\Rightarrow p(h+1)$ v?
Defino mi hipótesis inductiva.

HI: $\prod_{i=1}^{h} \frac{h+i}{2i-1} = 2^h$.

QPQ: $\prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-1} = 2^{h+1}$.

↳ Esto es lo que quiero probar.

$\prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-1} = \prod_{i=1}^{h} \frac{h+1+i}{2i-1} \left(\frac{h+1+h+1}{2(h+1)-1}\right) =$

$= \prod_{i=1}^{h} \frac{h+1+i}{2i-1} \left(\frac{2h+2}{2h+2-1}\right) = \prod_{i=1}^{h} \frac{h+1+i}{2i-1} \left(\frac{2h+2}{2h+1}\right) =$

$= \prod_{i=1}^{h} \left(\frac{h+1+i}{2i-1} \cdot \frac{h+i}{h+i}\right) \cdot \left(\frac{2h+2}{2h+1}\right) = \prod_{i=1}^{h} \left(\frac{h+1+i}{2i-1} \cdot \frac{h+i}{2i-1}\right) \left(\frac{2h+2}{2h+1}\right) =$

$= \overset{(*)}{\prod_{i=1}^{h} \frac{h+1+i}{h+i}} \cdot \prod_{i=1}^{h} \frac{h+i}{2i-1} \cdot \frac{2h+2}{2h+1} =$

(*) Es un producto telescópico.

CA:

$\prod_{i=1}^{h} \frac{h+1+i}{h+i} = \frac{\cancel{h+2}}{h+1} \cdot \frac{\cancel{h+3}}{\cancel{h+2}} \cdot \frac{\cancel{h+4}}{\cancel{h+3}} \cdots \frac{h+h+1}{\cancel{h+h}} = \frac{2h+1}{h+1}$

Entonces:

$$\frac{2n+1}{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-1}\right)\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\overset{HI}{=}\frac{2n+1}{n+1}\left(2^n\right)\cdot\frac{2n+2}{2n+1}=$$

$$=\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\cdot 2^n=\cancel{\frac{2n+1}{n+1}}\cdot\frac{2\cancel{(n+1)}}{\cancel{2n+1}}\cdot 2^n=$$

$=2\cdot 2^n=2^{n+1}$, como queríamos probar.

$\Longrightarrow p(n+1)$ V.

Así, queda probado por inducción que $p(n)$ es verdadera $\forall n\in\mathbb{N}$.

Escaneado con CamScanner

③ $5\cdot 35^n + 73^{3021} + \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!$

CA

$35 \equiv -1 (18)$ ya que $18 | 35+1 = 36$.

$73 \equiv 1 (18)$ ya que $18 | 73-1 = 72$.

$5(-1)^n + 1^{3021} + \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k! =$

$= 5(-1)^n + 1 + \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!$

Si n par: $5 + 1 + \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k! = 6 + \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!$

Si n impar: $-5 + 1 + \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k! = -4 + \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k!$

Probemos la sumatoria con algunos números.

$n=1 \Rightarrow 3 \cdot 1! = 3$.

$n=2 \Rightarrow 3 + 3^2 \cdot 2! = 21$.

$n=3 \Rightarrow 21 + 3^3 \cdot 3! = 183$.

$n=4 \Rightarrow 183 + 3^4 \cdot 4! = 2127$.

$n=5 \Rightarrow 2127 + 3^5 \cdot 5! = 31287$.

Probemos calcular el resto de cada n calculado anteriormente:

$n=1$.

$-4+3=-1$.

↳ El resto es 17.

$n=2$

$6+21=27$

↳ El resto es 9.

$n=3$

$-4+183=179$.

↳ El resto es 17.

$n=4$

$6+2127=2133$

↳ El resto es 9.

$n=5$.

$-4+31287=31283$.

↳ El resto es 17.

Podemos observar que se cumple un patrón que con un n par el resto de la división es 9, y con un n impar, el resto de la división es 17.

$$r_{18}\left(5\cdot 35^n+73^{3021}+\sum_{k=1}^{n}3^k\cdot k!\right)=\begin{cases}9 & \text{si } n \text{ par}\\ 17 & \text{si } n \text{ impar}\end{cases}$$

Bastante poca evidencia para tener fe de que ese patrón es así. Habría que probarlo más formalmente. De hecho, para $k\geq 6$ se tiene $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \underset{3\cdot 2}{6}\cdot 7\cdots (k-1)k \equiv 0\ (18)$

18

AGOSTINA [illegible]

④ Llamo $d = (a^3+31 : a^2-a+1)$

$\xrightarrow{\text{def. mcd}} d \mid a^3+31 \ \wedge \ d \mid a^2-a+1$.

Entonces:

$$\begin{cases} d \mid a^3+31 \\ d \mid a^2-a+1 \end{cases}$$

Por propiedades de la divisibilidad:

$$\begin{cases} d \mid a^3+31 \\ d \mid a^2-a+1 \end{cases} \xrightarrow{\cdot a} \begin{matrix} d \mid a^3+31 \\ d \mid a^3-a^2+a \end{matrix} \xrightarrow{\text{resto}} d \mid a^3+31-(a^3-a^2+a)$$

$d \mid \cancel{a^3}+31-\cancel{a^3}+a^2-a$.

$d \mid a^2-a+31$.

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{cases} d \mid a^2-a+1 \\ d \mid a^2-a+31 \end{cases} \xrightarrow{\text{resto}} d \mid a^2-a+31-(a^2-a+1)$$

$d \mid \cancel{a^2}-\cancel{a}+31-\cancel{a^2}+\cancel{a}-1$.

$d \mid 30$.

Como $d \mid 30$, $d \in Div_+(30)$.

Factorizo 30:

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

De esta forma:

$2 \cdot 3 \cdot 5 \mid a^3+31 \ \wedge \ 2 \cdot 3 \cdot 5 \mid a^2-a+1$.

¿$d = 2$? o $2 \cdot$ algo

$\xrightarrow[\text{transit.}]{\text{def. mcd}} 2 \mid a^3+31 \ \wedge \ 2 \mid a^2-a+1$.

Realizo una tabla de restos módulo 2.

$\underset{(2)}{\equiv}$

a	0	1.
a^2	0	1
a^3	0	1.
a^3+31	1	0
a^2-a+1.	1	1

Podemos ver en la tabla que $d \neq 2$. Más bien que $2 \nmid d$

¿$\cancel{d=3}$? $3 | d$?

$\underset{\text{transit.}}{\overset{\text{def. mcd}}{\Leftrightarrow}}$ $3 | a^3+31 \wedge 3 | a^2-a+1$.

Realizo una tabla de restos módulo 3.

$\underset{(3)}{\equiv}$

a	0	1	2
a^2	0	1	1
a^3	0	1	2
a^3+31.	1	2	0
a^2-a+1.	1	1	0

$3 | d$

Podemos ver en la tabla que $d=3$ cuando $a \equiv 2(3)$.

¿$d=5$?

$\underset{\text{transit.}}{\overset{\text{def. mcd}}{\Leftrightarrow}}$ $5 | a^3+31 \wedge 5 | a^2-a+1$.

Realizo una tabla de restos módulo 5.

$\underset{(5)}{\equiv}$

a	0	1	2	3	4
a^2	0	1	4	4	1
a^3	0	1	3	2	4
a^3+31.	1	2	4	3	0
a^2-a+1	1	1	3	2	3.

$5 \nmid d$

Podemos ver en la tabla que $d \neq 5$.

Concluimos que.

$$(a^3+31 : a^2-a+1) \begin{cases} 3 & \text{si } a \equiv 2(3) \\ 1 & \text{si } a \not\equiv 2(3) \end{cases}$$